Inocenţiu Drăghicescu   Ilie Petre Iambor

APLICAŢII de ANALIZĂ MATEMATICĂ pentru CLASA a XI-a

M 1

- exerciţii şi probleme rezolvate din manual
- exerciţii şi probleme propuse şi pregătitoare pentru diferite concursuri
- subiecte date la bacalaureat şi la admiterea în învăţământul superior

Cuprins

CAPITOLUL 1

Șiruri de numere reale

1.1. Noțiunea de șir de numere reale

A. Exerciții din manual

1. Să se scrie termenul general al șirului următor și să se pună acesta sub o formă cât mai simplă

$$1-\frac{1}{2^2};\ \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right);\ \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right);\ldots$$

(Ex. 1b, pag. 129)

Rezolvare

Termenul general este

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right),\ n\in\mathbb{N};\ (n\geq 2)$$

și observăm că

$$a_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2}$$

așadar $a_n=\dfrac{n+1}{2n}$.

2. Să se scrie a_{n+1} în funcție de a_{n-1} pentru șirurile:

a) $a_0=2,\ a_n=3a_{n-1}\ (n\geq 1)$; **b)** $a_0=1,\ a_n=\frac{1}{4}a_{n-1}+2\ (n\geq 1)$

c) $a_0=\frac{1}{2},\ a_n=\dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2}\ (n\geq 1)$; **d)** $a_0=4,\ a_{n+1}=3a_n+2\ (n\geq 0)$

(Ex. 3, pag. 129)

Rezolvare

a) $a_{n+1} = 3^2 a_{n-1}$;

b) $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}a_{n-1} + 2\right) + 2 = \frac{1}{4^2}a_{n-1} + \frac{5}{2}$;

c) $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{a_n + 2} = \dfrac{2\dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2}}{\dfrac{2a_{n-1}+1}{a_{n-1}+2}+2} = \dfrac{5a_{n-1}+4}{4a_{n-1}+5}$;

d) $a_{n+1} = 3(3a_{n-1} + 2) + 2 = 9a_{n-1} + 8$.

Câteva completări

a) Se observă că termenii şirului dat sunt cei ai unei progresii geometrice în care $a_0 = 2$, $q = 3$. Termenul său general va fi $a_n = a_0 \cdot q^n = 2 \cdot 3^n$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Considerând egalitățile $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 2$; $\quad a_n = \frac{1}{4}a_{n-1} + 2$, $n \in \mathbb{N}$ şi scăzându-le obținem $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4}(a_n - a_{n-1})$. Această egalitate ne arată că numerele $a_n - a_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, sunt termenii unei progresii geometrice în care primul termen este $a_1 - a_0 = \frac{1}{4}a_0 + 2 - a_0 = \frac{5}{4}$, iar rația $q = \frac{1}{4}$. Atunci $a_n - a_{n-1} = (a_1 - a_0)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{5}{4^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare $\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = 5\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4^k}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi cum în membrul drept apare suma unei progresii geometrice cu primul termen $\frac{1}{4}$ şi rația $q = \frac{1}{4}$, obținem

$$a_n - a_0 = 5\frac{\frac{1}{4^{n+1}} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{4^4}\right),\ n \in \mathbb{N} \text{ deci } a_n = 1 + \frac{5}{3}\left(1 - \frac{1}{4^4}\right) \text{ adică}$$

$a_n = \frac{1}{3}\left(8 - \frac{5}{4^n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ aceasta fiind expresia termenului general al şirului dat.

c) Deoarece $a_1 = \frac{2a_0 + 1}{a_0 + 2} = \frac{4}{5}$ se observă că termenul general al şirului dat este de forma $a_n = \frac{x_n}{y_n}$, $n \in \mathbb{N}$ unde $x_0 = 1$; $y_0 = 2$ şi $x_1 = 4$; $y_1 = 5$.

Atunci conform relației din enunț vom avea

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{2\dfrac{x_{n-1}}{y_{n-1}}+1}{\dfrac{x_{n-1}}{y_{n-1}}+2} = \frac{2x_{n-1}+y_{n-1}}{x_{n-1}+2y_{n-1}}$$

Deci $x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$ şi $y_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$.

Cum din prima egalitate avem $y_{n-1} = x_n - 2x_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$ cea de-a doua devine $x_{n+1} - 2x_n = x_{n-1} + 2(x_n - 2x_{n-1})$ adică $x_{n+1} - 4x_n + 3x_{n-1} = 0, n \in \mathbb{N}^*$.

Scriind această egalitate sub forma $x_{n+1} - x_n = 3(x_n - x_{n-1}), n \in \mathbb{N}$, rezultă că numerele $x_n - x_{n-1}, n \in \mathbb{N}^*$ sunt termenii unei progresii geometrice de rație $q = 3$ şi cu primul termen $x_1 - x_0 = 2$.

Procedând în continuare precum la punctul precedent obținem

$$x_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}, n \in \mathbb{N}, \text{ apoi } y_n = \frac{3^{n+1}+1}{2}, n \in \mathbb{N}.$$

Şirul dat are termenul general $a_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}+1}, n \in \mathbb{N}$.

d) Exercițiul este analog celui de la pct. b). Aplicând acelaşi procedeu obținem

$$a_n = 5 \cdot 3_n - 1, n \in \mathbb{N}.$$

Observație

1. La punctele b), c), d) ale exercițiului de care ne-am ocupat au apărut – direct sau pe parcurs – şiruri $(\alpha_n), n \in \mathbb{N}$ în care se cunosc α_0, α_1 şi se dă o relație liniară între trei termeni consecutivi ai ei.

Presupunem că $\alpha_0 = a; \alpha_1 = b$ iar relația este

$$A\alpha_n + B\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} = 0, \ n \geq 2.$$

Atunci termenul general α_n se poate afla după un procedeu expus pe larg în volumul Aplicații de Algebră şi Geometrie Analitică, M_1, clasa a XI-a, autori: Inocențiu Drăghicescu, Ilie Petre Iambor, Editura Aramis, 2002.

Reamintim, pe scurt, că luând α_n de forma $\alpha_n = r^n$ obținem ecuația caracteristică $Ar^2 + Br + C = 0$, după care:

– dacă $\Delta > 0$, iar rădăcinile sunt r_1 şi r_2, atunci $\alpha_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$
– dacă $\Delta = 0$, iar rădăcina (dublă) este r atunci $\alpha_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$
– dacă $\Delta < 0$, iar rădăcinile fiind complexe le luăm sub formă trigonometrică $r_{1,2} = \rho(\cos\varphi \pm i\sin\varphi), \varphi \in [0, 2\pi]$ atunci $\alpha_n = \rho^n(C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi)$

Pentru toate cazurile C_1 şi C_2 sunt constante şi se determină din condițiile:

$$\alpha_0 = C_1 + C_2 = a; \alpha_1 = C_1 r_1 + C_2 r_2 = b.$$

Reluând, de pildă, punctul d) de la exercițiul tratat avem $a_0 = 4$; $a_{n+1} = 3a_n + 2, n \in \mathbb{N}$ deci $a_1 = 3a_0 + 2 = 14$ şi considerăm egalitățile $a_{n+1} = 3a_n + 2; a_n = 3a_{n-1} + 2, \ n \in \mathbb{N}$ pe care le scădem.

Obținem $a_{n+1} - a_n = 3a_n - 3a_{n-1}$, deci $a_{n+1} - 4a_n + 3a_{n-1} = 0, n \in \mathbb{N}^*$.

În acest caz ecuația caracteristică este $r^2 - 4r + 3 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 1; r_2 = 3$.

Atunci $a_n = C_1 + C_2 3^n$ și $C_1 + C_2 = 4$; $C_1 + 3C_2 = 14$.

Rezultă $C_1 = -1$; $C_2 = 5$ deci $a_n = 5 \cdot 3^n - 1$.

2) Cele două relații de la punctul c), anume $x_n = 2x_{n-1} + y_{n-1}$ și $y_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ pot fi cuprinse simultan în următoarea scriere matriceală $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^*$.

Atunci, dacă considerăm matricele $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{N}$; $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, egalitatea anterioară devine $X_n = MX_{n-1}$ ceea ce ne arată că X_n, $n \in \mathbb{N}$ sunt termenii unei progresii geometrice de rație M și în care primul termen este $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Atunci $X_n = M^n \cdot X_0$ deci $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$, iar problema revine la a afla puterile M^n. Se observă că $M = I_2 + A$ unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ deci $M^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k$ și cum $A^2 = 2A; \ldots A^k = 2^{k-1}A, k \in \mathbb{N}$, vom avea:

$$M^n = I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k A^k = I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^{k-1} A = I_2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k 2^k\right) A = I_2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k - 1\right) A =$$

$$= I_2 + \frac{1}{2}(3^n - 1)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(3^n - 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$$

Așadar vom avea $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ adică

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3^{n+1} - 1}{2} \\ \dfrac{3^{n+1} + 1}{2} \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$. Rezultă $x_n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$; $y_n = \dfrac{3^{n+1} + 1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Fie șirul (a_n) definit prin $a_1 = \dfrac{2}{3}$ și $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine formula termenului general și să se verifice rezultatul prin inducție.

(Ex. 7, pag. 129)

Rezolvare

Conform relației date în enunț avem $a_{k+1} - a_k = \dfrac{1}{(k+2)(k+3)}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare $\sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{(k+2)(k+3)} = \sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{1}{k+2} - \dfrac{1}{k+3}\right)$ deci $a_n - a_1 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{n-1}{3(n+2)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $a_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{n-1}{3(n+2)} = \dfrac{n+1}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Verificarea prin inducție o lăsăm ca exercițiu.

4. Să se afle termenul general al șirului (x_n) în care se cunoaște $x_0 > 0$ și se dă relația $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*, n > 0$.

(Ex. 8, pag. 130).

Rezolvare

Relația din enunț fiind $x_{n+1}x_n = \dfrac{1}{2}(x_n^2 + a)$, $n \in \mathbb{N}$ considerăm și

$$x_n x_{n-1} = \frac{1}{2}(x_{n-1}^2 + a), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

iar prin scădere obținem $x_{n+1}x_n - x_n x_{n-1} = \dfrac{1}{2}(x_n^2 - x_{n-1}^2)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Căutăm și de această dată x_n de forma $x_n = r^n$ $(r \neq 0)$. După înlocuire obținem $r^{2n+1} - r^{2n-1} = \dfrac{1}{2}(r^{2n} - r^{2n-2})$, $n \in \mathbb{N}^*$ iar după împărțire cu r^{2n-2} în ambii membri, rezultă ecuația caracteristică $r^3 - r = \dfrac{1}{2}(r^2 - 1)$ adică $(r^2 - 1)\left(r - \dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Rădăcinile ei fiind $r_1 = 1$; $r_2 = -1$; $r_3 = \dfrac{1}{2}$ vom avea:

$x_n = C_1 + C_2(-1)^n + \dfrac{C_3}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$ și:

– pentru $n = 0$, $C_1 + C_2 + C_3 = x_0$

– pentru $n = 1$, $C_1 - C_2 + \dfrac{C_3}{2} = x_1$

– pentru $n = 2$, $C_1 + C_2 + \dfrac{C_3}{4} = x_2$

unde, conform relației din enunț

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) = \frac{x_0^2 + a}{2x_0}; \qquad x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) = \frac{(x_0^2 + a)^2 + 4ax_0^2}{4x_0(x_0^2 + a)}$$

Din sistemul celor trei egalități de mai sus rezultă

$$C_1 = \frac{1}{2}(-x_0 + x_1 + 2x_2);\quad C_2 = \frac{1}{6}(x_0 + 3x_1 + 2x_2);\quad C_3 = \frac{4}{3}(x_0 - x_2);$$

Aşadar $x_n = \frac{1}{2}(x_0 + x_1 + 2x_2) + \frac{(-1)^n}{6}(x_0 + 3x_1 + 2x_2) + \frac{x_0 - x_2}{3\cdot 2^{n-2}}$; $n \in \mathbb{N}$ în care x_1 şi x_2 se înlocuiesc cu valorile indicate. Obţinem:

$$x_n = \frac{1}{6x_0(x_0^2 + a)}\left[3a(3x_0^2 + a) + a(x_0^2 - a)(-1)^n + \frac{(x_0^2 - a)(3x_0^2 + a)}{2^{n-1}}\right],\ n \in \mathbb{N}.$$

B. Exerciţii şi probleme propuse

1. Să se enumere primii patru termeni, iar apoi să se afle termenul general al şirurilor (a_n) definite prin:

a) $x_0 = 0;\ x_{n+1} = -x_n + 2,\ n \in \mathbb{N};$

b) $x_0 = 0;\ x_1 = 1;\ x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1},\ n \in \mathbb{N};$

c) $x_0 = 1;\ x_{n+1} = -x_n + n,\ n \in \mathbb{N}.$

2. Aflaţi termenul general al şirurilor definite astfel:

a) $x_0 = 0;\ x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + 1,\ n \in \mathbb{N};$

b) $x_0 = -1;\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbb{N};$

c) $x_0 = 1;\ x_1 = 0;\ x_{n+1} = x_n - \frac{1}{4}x_{n-1},\ n \geq \mathbb{N}.$

3. Fie numerele reale a, b nenule. Să se afle termenul general al şirului (x_n) definit astfel:

a) $x_0 = a;\ x_1 = b;\ x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2},\ (n \geq 2);$

b) $x_0 = a;\ x_1 = b;\ (a > 0;\ b > 0),\ x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot x_{n-2}}\ \ (n \geq 2).$

4. Se consideră numerele $x_0 = 1$; $y_0 = 0$ şi se cere să se afle termenii generali ai şirurilor (x_n) şi (y_n) definite prin relaţiile:

a) $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1});\ y_n = \frac{1}{6}(7y_{n-1} + x_{n-1}),\ \ n \in \mathbb{N}^*;$

b) $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + y_{n-1});\ y_n = \frac{1}{3}(x_{n-1} + 2y_{n-1}),\ \ n \in \mathbb{N}^*;$

5. Şirul (a_n) se defineşte prin $a_0 = 1$; $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Aflaţi termenul său general.

6. Se consideră şirul cu termenul general:

$$x_n = C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 2^3 + C_{2n+1}^5 2^6 + \ldots + C_{2n+1}^{2n+1} 2^{3n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Arătaţi că nici unul dintre termenii săi nu este divizibil prin cinci.

7. Fie şirul cu termenul general $x_n = \dfrac{1}{C_n^0} + \dfrac{1}{C_n^1} + \ldots + \dfrac{1}{C_n^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Stabiliţi o relaţie de recurenţă între oricare doi termeni consecutivi ai săi.

8. Să se scrie sub o formă mai simplă termenul general al şirurilor definite prin:

a) $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \ldots + \dfrac{n}{2^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

b) $x_n = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{a}{2} + \dfrac{1}{2^2}\operatorname{tg}\dfrac{a}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\operatorname{tg}\dfrac{a}{2^n}$; $a \neq 0$; $n \in \mathbb{N}^*$.

C. Răspunsuri, indicaţii şi soluţii

1. a) Conform relaţiei din enunţ avem $x_1 = 2$ şi $x_{n+1} = -(-x_{n-1} + 2) + 2 = x_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci, rezultă că: $x_0 = x_2 = \ldots = x_{2n} = \ldots$; $x_1 = x_3 = \ldots = x_{2n+1} = \ldots$; $n \in \mathbb{N}$, deci $x_{2n} = 0$; $x_{2n+1} = 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Subşirurile (x_{2n}), (x_{2n+1}) ale termenilor de rang par şi respectiv ale celor de rang impar din şirul dat sunt constante.

b) Relaţia din enunţ scrisă sub forma: $x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$; $n \in \mathbb{N}^*$ ne arată că $x_n - x_{n-1} = x_1 - x_0 = 1$; $n \in \mathbb{N}^*$, deci termenii şirului dat formează o progresie aritmetică în care primul termen este $x_0 = 0$ şi raţia $r = 1$. Atunci: $x_n = x_0 + nr = n$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Conform relaţiei din enunţ avem: $x_{n+1} = -(-x_{n-1} + n - 1) + n = x_{n-1} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$. ceea ce ne arată că din doi în doi termenii şirului dat formează progresii aritmetice de raţie $r = 1$. Este vorba despre subşirurile (x_{2n}), (x_{2n+1}) $n \in \mathbb{N}$ în care $x_0 = 1$; $x_1 = -1$, prin urmare $x_{2n} = 1 + n$; $x_{2n+1} = -1 + n$.

2. a) Conform relaţiei din enunţ avem $x_{n+1} = -\dfrac{1}{2}x_n + 1$; $x_n = -\dfrac{1}{2}x_{n-1} + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$,

iar de aici prin scădere $x_{n+1} - x_n = -\dfrac{1}{2}(x_n - x_{n-1})$ adică $2x_{n+1} - x_n - x_{n-1} = 0$; $n \in \mathbb{N}^*$.

În acest caz se obţine ecuaţia caracteristică $2r^2 - r - 1 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 1$; $r_2 = -\dfrac{1}{2}$. Ţinându-se seamă că $x_0 = 0$; $x_1 = 1$ se obţine $x_n = \dfrac{2}{3}\left[1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$;

b) Din $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2^n}$ şi $x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}^*$ obținem relația $4x_{n+1} - 4x_n + x_{n-1} = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ a cărei ecuație caracteristică este $4r^2 - 4r + 1 = 0$ care are rădăcina dublă $r = \frac{1}{2}$. Se obține $x_n = \frac{2n-1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

c) Se procedează ca la punctul precedent. Ecuația caracteristică are rădăcina dublă $r = \frac{1}{2}$. Se obține: $x_n = \frac{1-n}{2^n}$ $n \in \mathbb{N}$.

3. a) Relația din enunț fiind $2x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$ $(n \geq 3)$ se obține ecuația caracteristică $2r^2 - r - 1 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = 1$; $r_2 = -\frac{1}{2}$. Prin urmare $x_n = C_1 + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ constantele C_1 şi C_2 rezultând din sistemul $x_0 = C_1 + C_2 = a$; $x_1 = C_1 - \frac{C_2}{2} = b$ obținem $C_1 = \frac{a+2b}{3}$; $C_2 = \frac{2}{3}(a-b)$, iar apoi $x_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{2}{3}(a-b)\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$;

b) Problema revine la cea precedentă observând că logaritmând relația din enunț obținem $\lg x_n = \frac{\lg x_{n-1} + \lg x_{n-2}}{2}$ şi atunci notând $y_n = \lg x_n$, condițiile problemei sunt:

$$y_0 = \lg a;\quad y_0 = \lg b;\quad y_n = \frac{y_{n-1} + y_{n-2}}{2}\quad (n \geq 2).$$

Conform celor stabilite vom avea

$$y_n = \frac{1}{3}(\lg a + 2\lg b) + \frac{2}{3}(\lg a - \lg b)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lg\left(\frac{a}{b}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{2}{3}}\sqrt[3]{ab^2} =$$

$$= \lg\left(\frac{a}{b}\right)^{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{2}{3}}\sqrt[3]{ab^2}$$

Aşadar $x_n = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{(-1)^n}{3\cdot 2^{n-1}}}\sqrt[3]{ab^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. a) Din relațiile date avem:

$$y_{n-1} = 2x_n - x_{n-1} \text{ şi } 3x_{n+1} - 5x_n + 2x_{n-1} = 0,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Se obține $x_n = -\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, iar apoi $y_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Se procedează ca la punctul precedent şi se obțin termenii generali:

$$x_n = \frac{1}{5}\left(2 + \frac{3}{6^n}\right); \; y_n = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right), n \in \mathbb{N}.$$

5. Deoarece $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{2}{3}$ considerăm termenul general al şirului de forma $a_n = \dfrac{x_n}{y_n}$, $n \in \mathbb{N}$ unde $x_0 = 1; y_0 = 1$ şi $x_1 = 1; y_1 = 2$. Atunci din relația dată în enunț obținem

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{1}{1 + \dfrac{x_n}{y_n}} = \frac{y_n}{y_n + x_n}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Procedând ca în cazurile precedente obținem:

$$x_n = \frac{(\sqrt{5}-2)(1-\sqrt{5})^{n-2} + (\sqrt{5}+2)(1+\sqrt{5})^{n-2}}{\sqrt{5}\cdot 2^{n-2}};$$

$$y_n = \frac{(\sqrt{5}-2)(1-\sqrt{5})^{n-1} + (\sqrt{5}+2)(1+\sqrt{5})^{n-1}}{\sqrt{5}\cdot 2^{n-1}}, \; n \in \mathbb{N}$$

deci

$$x_n = \frac{2[(\sqrt{5}-2)(1-\sqrt{5})^{n-2} + (\sqrt{5}+2)(1+\sqrt{5})^{n-2}]}{(\sqrt{5}-2)(1-\sqrt{5})^{n-1} + (\sqrt{5}+2)(1+\sqrt{5})^{n-1}}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Mențiune

Problemele care urmează sunt mai deosebite, ele solicitând atât perspicacitatea şi fantezia rezolvitorului, cât şi stăpânirea perfectă a unor cunoştințe din materia claselor anterioare.

6. (problemă propusă în 1974 de către Radu Gologan pentru OIM)

Deoarece avem $x_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} 2^{3k} = 2^{-\frac{3}{2}} \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{2k+1}$ introducem şi auxiliarul $y_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1}\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{2k}$. Atunci rezultă că $2^{\frac{3}{2}} x_n + y_n = \left(1 + 2^{\frac{3}{2}}\right)^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare

$$2^{\frac{3}{2}} x_{n+1} + y_{n+1} = \left(1 + 2^{\frac{3}{2}}\right)^{2n+3} = \left(1 + 2^{\frac{3}{2}}\right)^{2n+1} \cdot \left(1 + 2^{\frac{3}{2}}\right)^{2} = \left(2^{\frac{3}{2}} x_n + y_n\right)\left(9 + 2 \cdot 2^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= 9 \cdot 2^{\frac{3}{2}} x_n + 9y_n + 16x_n + 2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} y_n = 2^{\frac{3}{2}}(9x_n + 2y_n) + 9y_n + 16x_n.$$

Deoarece numerele x_n și y_n sunt raționale (chiar naturale!) oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, prin identificare obținem relațiile $x_{n+1} = 9x_n + 2y_n$; $y_{n+1} = 16x_n + 9y_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Întrucât ne interesează comportarea numerelor x_n, $n \in \mathbb{N}^*$ în raport cu eventualul divizor 5, în aceste relații evităm multiplii acestuia (spunem că operațiile respective se fac „modulo 5"), iar în continuare vom proceda la fel.

Atunci putem scrie că $x_{n+1} = -x_n + 2y_n$; $y_{n+1} = x_n - y_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ relații care, matriceal, se pot scrie sub forma $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$ iar dacă notăm $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ $n \in \mathbb{N}^*$; $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ aceasta devine. $X_{n+1} = AX_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci $X_{n+2} = A^2X_n$ și $X_{n+3} = A^3X_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, dar $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ și $A^3 = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$ sau „modulo 5" $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_2$ deci $X_{n+3} = 3X_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ sau $\begin{pmatrix} x_{n+3} \\ y_{n+3} \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ adică $x_{n+3} = 3x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezultă că în raport cu divizorul 5 termenii x_n, $n \in \mathbb{N}^*$ se comportă periodic de perioadă 3. Atunci pentru a demonstra cerința problemei este suficient să reținem primii trei termeni ai șirului adică

$$x_1 = \sum_{k=0}^{1} C_3^{2k+1} 2^{3k} = C_3^1 + C_3^3 2^3;$$

$$x_2 = \sum_{k=0}^{2} C_5^{2k+1} 2^{3k} = C_5^1 + C_5^3 2^3 + C_5^5 2^6;$$

$$x_3 = \sum_{k=0}^{3} C_7^{2k+1} 2^{3k} = C_7^1 + C_7^3 2^3 + C_7^5 2^5 + C_7^7 2^7.$$

Dar neglijând multiplii de 5 cele trei numere sunt $x_1 = 1$; $x_2 = 4$; $x_3 = 2$ ceea ce încheie demonstrația.

7. Deoarece $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$, $n \in \mathbb{N}^*$ rezultă că

$$x_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{C_{n+1}^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\frac{n+1}{k} C_n^{k-1}} = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{C_n^{k-1}}.$$